12 Ugao između dvije krive na površi

Ugao između dvije krive na površi definira se kao ugao između njihovih tangenata u presječnoj tački M.

Neka su zadane krive α i β sa

$$\alpha : \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t), v = v(t);$$

$$\beta : \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\overline{u}(t), \overline{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \overline{u}(t), \overline{v} = v(t);$$

tada su njihovi tangentni vektori dati s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \vec{r}_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_u \frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} + \vec{r}_v \frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Ugao ω između dvije krive na plohi u presječnoj tački M jednak je tada

$$\cos\omega = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}{|\mathrm{d}\vec{r}_1||\mathrm{d}\vec{r}_2|} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2}{\sqrt{\mathrm{d}\vec{r}_1^2}\sqrt{\mathrm{d}\vec{r}_2^2}}, \ \text{t,.}$$

$$\cos\omega = \frac{E\mathrm{d}u\mathrm{d}\overline{u} + F(\mathrm{d}u\mathrm{d}\overline{v} + \mathrm{d}v\mathrm{d}\overline{u}) + G\mathrm{d}v\mathrm{d}\overline{v}}{\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}\sqrt{E\mathrm{d}\overline{u}^2 + 2F\mathrm{d}\overline{u}\mathrm{d}\overline{v} + G\mathrm{d}\overline{v}^2}}$$

gdje su

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}_u\mathrm{d}u + \mathrm{d}\vec{r}_v\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}\vec{r}_1 = \mathrm{d}\vec{r}_u\mathrm{d}\overline{u} + \mathrm{d}\vec{r}_v\mathrm{d}\overline{v}$$

(napomena: Gausove veličine E, F i G računamo u tački M).

Specijalni slučajevi:

(a) Ugao između krivih na površi i u-krive dan je izrazom (tada je β u-kriva, tj. $\overline{v} = \text{const.}$, $\mathrm{d}\overline{v} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v}{\sqrt{E}\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}}$$

(b) Ugao između krivih na površi i v-krive dan je izrazom (tada je β v-kriva, tj. $\overline{u} = \text{const.}$, $\mathrm{d}\overline{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{E\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v}{\sqrt{G}\sqrt{E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2}}$$

(c) Ugao između koordinatnih u i v-krivih dan je izrazom (tada je kriva α u-kriva, tj. $v = \text{const.}$, $\mathrm{d}v = 0$, a kriva β v-kriva, tj. $\overline{u} = \text{const.}$, $\mathrm{d}\overline{u} = 0$):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

(d) Ako su krive α i β na površi međusobno okomite, tada je

$$E\mathrm{d}u\mathrm{d}\overline{u} + F(\mathrm{d}u\mathrm{d}\overline{v} + \mathrm{d}v\mathrm{d}\overline{u}) + G\mathrm{d}v\mathrm{d}\overline{v} = 0.$$

(e) Uslov okomitosti koordinatnih u i v krivih prema c glasi

$$F = 0.$$

5. Naći ugao pod kojim se sijeku krive

$$x = x_0,\ y = y_0 \text{ na površi } z = axy.$$

6. Na površi (sfera)

$$\vec{r} = (a\cos v \sin u, a\sin v \sin u, a\cos u), \quad u \in [0,\pi], v \in [0,2\pi],$$

zadane su dvije krive c_1 i c_2 sa $c_1 : u = v$ i $c_2 : \overline{u} + \overline{v} = \frac{\pi}{2}$.
(a) Naći presječne tačke datih krivih.
(b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

7. Površ Γ definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u\sin v,\, u\cos v,\, v).$$

Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \le u \le \mathrm{sh} v,\; 0 \le v \le v_0.$$

Izračunati uglove trougla.

(#) Naći ugao pod kojim se sijeku krive

$x=x_0,\ y=y_0$ na plohi $z=axy$.

Rj. Ploha $z=axy$ ima vektorsku jednačinu

I način: $\vec{r}=(x, y, axy), \quad x,y\in\mathbb{R}.$

Ako uvrstimo za $x=x_0$ i $y=y_0$ u $\vec{r}$ dobićemo koordinatne krive, koje imaju jednačin:

$$\vec{r}_1=(x_0, y, ax_0y)$$

$$\vec{r}_2=(x, y_0, axy_0)$$

Tangentni vektori tih krivih su

$$\frac{d\vec{r}_1}{dy}=(0, 1, ax_0), \qquad \frac{d\vec{r}}{dx}=(1, 0, ay_0)$$

pa je ugao između njih dan sa

$$\cos\omega=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2x_0^2}\sqrt{1+a^2y_0^2}}$$

II način:

Ugao ω možemo odrediti i na drugi način: on se, naime, podudara sa uglom između koordinatnih krivih, a taj je dat formulom

$$\cos\omega=\frac{F}{\sqrt{EG}}$$

Kako je $E=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right)^2=1+a^2y^2$, $F=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=a^2xy$, $G=1+a^2x^2$

Koordinatne krive se sijeku u tački (x_0, y_0) pa je

$$\cos\omega=\frac{a^2x_0y_0}{\sqrt{1+a^2y_0^2}\sqrt{1+a^2x_0^2}}$$

(#) Na plohi (sfera):

$$\vec{r} = (a\cos v \sin u,\ a\sin v \sin u,\ a\cos u),\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi],$$

zadane su dvije krive C_1 i C_2 sa $C_1: u=v$ i $C_2: \bar{u}+\bar{v}=\frac{\pi}{2}$.

a) Naći presječne tačke datih krivih

b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

R:

a) Dvije date krive imaju jednačine

$$C_1: \vec{r}_1 = (a\cos u \sin u,\ a\sin^2 u,\ a\cos u)$$

$$C_2: \vec{r}_2 = (a\underbrace{\cos(\tfrac{\pi}{2}-\bar{u})}_{\cos\frac{\pi}{2}\cos\bar{u}+\sin\frac{\pi}{2}\sin\bar{u}}\sin\bar{u},\ a\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2}-\bar{u})}_{=\sin\frac{\pi}{2}\cos\bar{u}-\sin\bar{u}\cos\frac{\pi}{2}}\sin\bar{u},\ a\cos\bar{u})$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{umjesto } \bar{u} \\ \text{možemo} \\ \text{pisati } u\end{array}\right| = (a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ a\cos u)$$

Presječne tačke od C_1 i C_2 su za one vrijedn. u za koje vrijedi

$$a\cos u\sin u = a\sin^2 u$$
$$a\sin^2 u = a\sin u\cos u$$
$$a\cos u = a\cos u$$

$$a\cos u\sin u = a\sin^2 u$$
$$a\sin u(\cos u-\sin u)=0$$
$$\sin u = 0, \quad \text{ili} \quad \cos u - \sin u = 0$$
$$u_1=0 \ \text{ili}\ u_2=\pi \quad \text{ili} \quad u=\frac{\pi}{4}$$

Presječne tačke dvije date krive su

$M_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ za $u=\frac{\pi}{4}$,

$M_2(0,0,a)$ za $u=0$ i

$M_3(0,0,-a)$ za $u=\pi$.

b) ugao pod kojim se dvije date krive sijeku ćemo naći na dva načina

I način

Traženi ugao je jednak uglu između njihovih tangenata u presječnim tačkama krivih. Tangente na zadane krive imaju smjer

$$\frac{d\vec{r}_1}{du} = (a\cos^2 u - a\sin^2 u,\ a\sin u\cos u,\ -a\sin u)$$
$$= (a\cos 2u,\ a\sin 2u,\ -a\sin u)$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{du} = (a\sin 2u,\ a\cos 2u,\ -a\sin u)$$

Znamo da je

$$\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du} = \left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right| \cos\sphericalangle\left(\frac{d\vec{r}_1}{du}, \frac{d\vec{r}_2}{du}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

$$\cos\omega = \frac{\frac{d\vec{r}_1}{du}\cdot\frac{d\vec{r}_2}{du}}{\left|\frac{d\vec{r}_1}{du}\right|\cdot\left|\frac{d\vec{r}_2}{du}\right|} = \frac{a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin 2u\cos 2u + a^2\sin^2 u}{\sqrt{a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 2u + a^2\sin^2 u}\ \sqrt{a^2\sin^2 2u + a^2\cos^2 2u + a^2\sin^2 u}}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin 4u + \sin^2 u}{1+\sin^2 u}$$

Za $u=\frac{\pi}{4}$ traženi ugao je $\cos\omega = \frac{0+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ tj. $\omega = \arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_3 krive se sijeku pod pravim uglom. Napomenimo, da u sve tri tačke egzistiraju tangente na obe krive, jer su sve tri tačke regularne tačke krive.

$$\boxed{\text{Regularne tačke krive } \vec{r}=\vec{r}(t) \text{ su one tačke za koje je } \dot{\vec{r}}(t)\neq 0.}$$

II način

Ugao ω između dvije krive na plohi u presječnoj tački M (gdje je M regularna tačka parametrizacije tj. tačka u kojoj je $EG-F^2\neq 0$) se računa po formuli

$$\cos\omega=\frac{E\,du\,d\bar{u}+F(du\,d\bar{v}+dv\,d\bar{u})+G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\sqrt{E\,d\bar{u}^2+2F\,d\bar{u}\,d\bar{v}+G\,d\bar{v}^2}}$$

U jednom od prethodnih zadataka već smo računali Gaussove fundamentalne veličine prvog reda i dobili da je

$$E=a^2,\quad F=0,\quad G=a^2\sin^2 u$$

$$EG-F^2=a^4\sin^2 u$$

Za M_1 imamo da je $u=\frac{\pi}{4}$ tj. $EG-F^2=\frac{a^2}{2}\neq 0$.

Za M_2 imamo da je $u=0$ tj. $EG-F^2=0$

Za M_3 imamo da je $u=\pi$ tj. $EG-F^2=0$.

Odavde vidimo da je samo M_1 regularna tačka parametrizacije (razlikujmo pojmove regularna tačka parametrizacije i regularna tačka krive).

$$\cos\omega=\frac{E\,du\,d\bar{u}+G\,dv\,d\bar{v}}{\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}\sqrt{E\,d\bar{u}^2+G\,d\bar{v}^2}}=\left|\begin{array}{l} M_1: \\ \text{za } u=\frac{\pi}{4}\quad G=\frac{a^2}{2} \\ v=u \Rightarrow dv=du \\ \bar{v}=\frac{\pi}{2}-\bar{u} \Rightarrow d\bar{v}=-d\bar{u}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{a^2\,du\,d\bar{u}-\frac{a^2}{2}\,du\,d\bar{u}}{\sqrt{a^2du^2+\frac{a^2}{2}du^2}\sqrt{a^2d\bar{u}^2+\frac{a^2}{2}d\bar{u}^2}}=\frac{a^2(1-\frac{1}{2})du\,d\bar{u}}{a\,du\sqrt{1+\frac{1}{2}}\,a\,d\bar{u}\sqrt{1+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

U tački M_1 traženi ugao je $\omega=\arccos\frac{1}{3}$.

U tačkama M_2 i M_3 ne možemo tražiti ugao između dvije krive jer su to singularne tačke krive.

U singularnim tačkama parametarske mreže plohe, ugao između dvije krive na plohi potražit ćemo direktno kao na prvi način (tj. neovisno o plohi). Može se također odabrati i druga parametrizacija za koju te tačke nisu singularne.

Površ Π definisana je vektorskom jednačinom

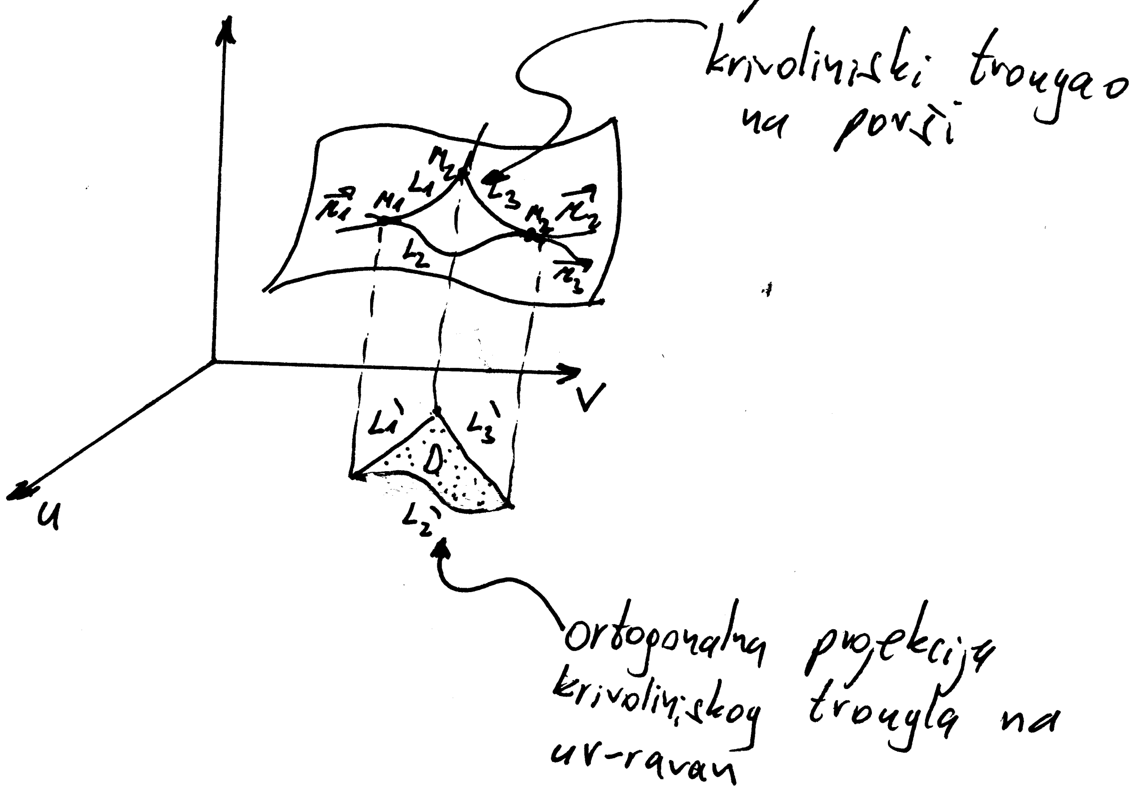
$$\vec{r} = (u\sin v,\ u\cos v,\ v).$$

Na površi je zadan krivolinijski trougao

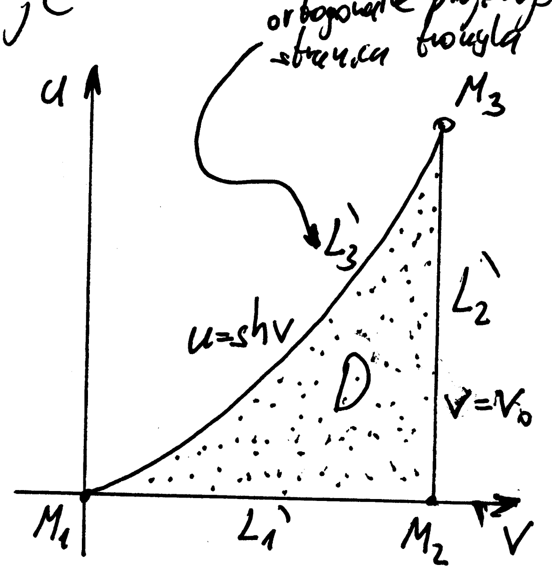
$$0 \le u \le \operatorname{sh} v, \quad 0 \le v \le v_0.$$

Izračunati uglove trougla.

Rj. Posmatrajmo neku površ u opštem slučaju



U našem slučaju ortogonalna projekcija je



Odredimo jednačine stranica krivolinijskog trougla.

$$L_1' : \ u = 0 \xrightarrow{0 \le v \le v_0}$$

$$L_1 : \ \vec{r}_1 = (0, 0, v), \quad 0 \le v \le v_0,$$

$L_2' : v = v_0 , \quad 0 \le u \le \operatorname{sh} v_0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad L_2 : \vec{r}_2 = (u \sin v_0, u \cos v_0, v_0), \quad 0 \le u \le \operatorname{sh} v_0$$

$L_3' : u = \operatorname{sh} v , \quad 0 \le v \le v_0 \quad \Rightarrow$

$$L_3 : \vec{r}_3 = (\operatorname{sh} v \sin v, \operatorname{sh} v \cos v, v), \quad 0 \le v \le v_0$$

Odredimo presječne tačke krivih $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (0,0,v) \\ \vec{r}_2 &= (u \sin v_0, u \cos v_0, v_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} u \sin v_0 &= 0 \\ u \cos v_0 &= 0 \\ v_0 &= v \end{aligned} \Rightarrow M_1(\overset{v}{v_0}, \overset{u}{0})$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (0,0,v) \\ \vec{r}_3 &= (\operatorname{sh} v \sin v, \operatorname{sh} v \cos v, v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \operatorname{sh} v \sin v &= 0 \\ \operatorname{sh} v \cos v &= 0 \end{aligned} \Rightarrow M_2(\overset{v}{0}, \overset{u}{0})$$

slično za $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ $\quad M_3(\overset{v}{v_0}, \overset{u}{\operatorname{sh} v_0})$

Ugao između dvije krive linije se definiše kao ugao između tangenti u presječnoj tački tih krivih.

$$\dot{\vec{r}}_1 = (0,0,1)$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = (\sin v_0, \cos v_0, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}_3 = (\operatorname{ch} v \sin v + \operatorname{sh} v \cos v, \operatorname{ch} v \cos v - \operatorname{sh} v \sin v, 1)$$

Znamo da je

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y})$$

$$\cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

Time je

$$\cos \varphi_1 = \left. \frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{|\dot{\vec{r}}_1||\dot{\vec{r}}_2|} \right|_{M_1} = \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \varphi_2 = \cos \varphi_3 = \ldots = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

traženi uglovi

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*